27/4/2017

Αξιοποίηση Θεωρήματος Lehmann-Scheffe για κατασκευή ΑΟΕΔ εκτιμητών

Βήμα 1: Εύρεση του επαρκούς και πλήρους στατιστικού

Βήμα 2: Εύρεση μιας συνάρτησης του επαρκούς και πλήρους που είναι αμερόληπτη της παραμέτρου που εκτιμούμε

Παράδειγμα 1: Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_n$ από πληθυσμό με

$B(1,\theta)$, $p(x_i,\theta) = \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}$, $0<\theta<1$

Να κατασκευαστεί ΑΟΕΔ εκτιμητής της θ, της θ^2, και της $\theta(1-\theta)$

Λύση: $\boxed{\text{επαρκές}}$ $p(\underline{x},\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i,\theta) = \theta^{\Sigma x_i}(1-\theta)^{n-\Sigma x_i}$

$T = \Sigma x_i$ επαρκές

Πρέπει νδο $E(h(T))=0 \Rightarrow h(T)=0$

$E(h(T)) = \Sigma h(t) \cdot P(T=t)$

ροπογεννήτρια

$X_i \sim B(1,\theta) \Rightarrow \sum X_i \sim B(n,\theta)$, $0<\theta<1$

$$E(h(T)) = \sum_{t=0}^{n} h(t)\cdot\binom{n}{t}\cdot\theta^{t}\cdot(1-\theta)^{n-t} = 0,\ \forall\theta\in(0,1)$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{n} h(t)\cdot\binom{n}{t}\cdot\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{t} = 0,\ \forall\theta\in(0,1)$$

$$\overset{Y=\frac{\theta}{1-\theta}}{\Rightarrow} \underbrace{\sum_{t=0}^{n} h(t)\cdot\binom{n}{t} Y^{t}}_{\substack{\text{Πολυώνυμο n-οστού}\\ \text{βαθμού και έχει}\\ \text{το πολύ n-διαφορετικές}\\ \text{ρίζες εκτός αν είναι}\\ \text{το μηδενικό πολυώνυμο}}} = 0,\quad Y=\frac{\theta}{1-\theta},\ 0<\theta<1$$

Επειδή όμως $\sum_{t=0}^{n} \varphi(t)\binom{n}{t}\cdot Y^{t} = 0$, $\forall\ 0<\theta<1$

άρα το πολυώνυμο έχει άπειρες ρίζες

Άρα $\varphi(t)\cdot\binom{n}{t} = 0 \Rightarrow \varphi(t)=0 \Rightarrow T$ πλήρες

Βήμα 2: Εύρεση συνάρτησης του $T=\sum X_i \sim B(n,\theta)$ που να είναι αμερόληπτη της $\theta, \theta^2, \theta(1-\theta)$

Ξεκινάμε με την $E(T) = E$ (επαρκούς, πλήρους)

$$E(T) = E(\sum X_i) = \sum E(X_i) = n\theta$$

$\Rightarrow E(\frac{1}{n}T)=\theta$. Άρα $\bar{X}$ αμερόληπτος της θ και συνάρτηση επαρκούς και πλήρους T

Άρα από L-S $\bar{X}$ ΑΟΕΔ της θ

Δοκιμάζω το T^2, υπολογίζω το $E(T^2)$

$Var(T) = E(T^2) - (E(T))^2 \Rightarrow E(T^2) = Var(T) + E(T)$

$\Rightarrow E(T^2) = n\theta(1-\theta) + (n\theta)^2$

$= n\theta - n\theta^2 + (n\theta)^2 = E(T) + n(n-1)\cdot\theta^2$

$\Rightarrow E(T^2) - E(T) = n(n-1)\theta^2 \Rightarrow E(T^2 - T) = n(n-1)\theta^2$

$$\Rightarrow \theta^2 = \frac{1}{n(n-1)} \cdot E(T^2 - T)$$

Άρα, ο $\frac{T^2 - T}{n(n-1)}$ είναι αμερόληπτος της θ^2 και

συνάρτηση επαρκούς και πλήρους άρα από L-S $\frac{T^2-T}{n(n-1)}$ ΑΟΕΔ

της θ^2.

Παραδ. 2: $X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ. $U(0,\theta)$, $\theta > 0$. Να βρεθεί

ΑΟΕΔ του θ

Λύση: $f_{X_i}(x,\theta) = \frac{1}{\theta}$, $0 < \theta < x_i$, $F_X(x,\theta) = \frac{x}{\theta}$, $0 < x < \theta$

Επαρκεί: $X_{(n)}$ επαρκεί (προηγούμενο μάθημα)

Για να αποδειχθεί η πληρότητα απαιτείται η κατανομή του $X_{(n)} = T$

Από 1ο μάθημα $f_T(t,\theta) = n\cdot[F_X(t)]^{n-1} \cdot f_X(t,\theta)$

$= n\cdot\left(\frac{t}{\theta}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{\theta} = n\cdot\frac{t^{n-1}}{\theta^n}$, $0 < t < \theta$ (πρώτο μάθημα)

$$\Rightarrow f(t,\theta) = n\cdot\frac{t^{n-1}}{\theta^n},\quad 0<t<\theta$$

Για πληρότητα αρκεί να δειχθεί ότι

$E(\varphi(T))=0,\ \forall\theta \Rightarrow \varphi(t)=0,\ \forall t$

$$E[\varphi(T)]=0 \Rightarrow \int_0^\theta \varphi(t)\cdot f_T(t)\,dt=0$$

$$\Rightarrow \int_0^\theta \varphi(t)\cdot n\cdot\frac{t^{n-1}}{\theta^n}\,dt=0$$

$$\Rightarrow \int_0^\theta \varphi(t)\cdot t^{n-1}=0,\ \forall\theta>0$$

$$\Rightarrow \varphi(\theta)\cdot\theta^{n-1}=0 \Rightarrow \varphi(\theta)=0,\ \forall\theta$$

$\Rightarrow$ T πλήρες

$$E(T)=\theta \Rightarrow \int_0^\theta n\cdot\frac{t^n}{\theta^n}\,dt=\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^\theta t^n\,dt=\frac{\theta^{n+1}}{n} \Rightarrow \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^\theta=\frac{\theta^{n+1}}{n}$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{\theta^{n+1}}{n+1}=\frac{\theta^{n+1}}{n}}$$

$$E(T)=\int_0^\theta n\cdot\frac{t^n}{\theta^n}\,dt=\frac{n}{\theta^n}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^\theta$$

$$=\frac{n}{\theta^n}\cdot\frac{\theta^{n+1}}{n+1}$$

$$=\frac{n}{n+1}\theta$$

Άρα $E\left(\frac{n+1}{n}T\right)=\theta$. Άρα $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ ΑΟΕΔ της θ.

Έστω τ.δ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ από πληθυσμό με $\mathcal{E}\kappa\theta(1/\theta)$

Να βρεθεί ο ΑΟΕΔ της θ^2.

Λύση $f(x,\theta) = \frac{1}{\theta} \cdot e^{-x/\theta}$, $x>0, \theta>0$

$$f(\underset{\sim}{x},\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \frac{1}{\theta^n} \cdot e^{-\Sigma x_i/\theta}$$

$T = \Sigma x_i$ επαρκής

$f_T^{(t)} \sim G(n,\theta)$.

Άρα:

$$E(h(T)) = \int_0^{+\infty} h(t) \cdot \frac{t^{n-1} \cdot e^{-t/\theta}}{\theta^n \cdot \Gamma(n)} dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} h(t) \cdot t^{n-1} \cdot e^{-t/\theta} dt = 0$$

$$\Rightarrow L\{\varphi(t) \cdot t^{n-1}\} = 0 \Leftrightarrow \varphi(t) \cdot t^{n-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi(t) = 0$$

Μετασχηματισμός Laplace

$T = \sum X_i \sim G(n, \theta)$ επαρκής και πλήρες

$\bar{X}$ ΑΟΕΔ του θ

$$E(T^2) = Var(T) + (E(T))^2$$

$$= n\theta^2 + (n\theta)^2 = n\theta^2 + n^2\theta^2 = \theta^2(n+n^2)$$

$$E(T^2) = \theta^2(n+n^2) \Rightarrow E\left(\frac{T^2}{n+n^2}\right) = \theta^2$$

Άρα, $\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n(n+1)}$ ΑΟΕΔ του θ^2

Παράδειγμα 4: Έστω τΔ από πληθυσμό με $f(x,\theta) = e^{-(x-\theta)}, x \geq \theta$

$\theta > 0$. Να βρεθεί επαρκής και πλήρες

Λύση: $\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\theta)} \cdot I_{[\theta,+\infty)}(x_i)$

$$= e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i + n\theta} \cdot \prod_{i=1}^{n} I_{[\theta,+\infty)}(x_i)$$

$$\prod_{i=1}^{n} I_{[\theta,+\infty)}(x_i) = \begin{cases} 1, & \forall i, \ \theta \leq x_i < +\infty \\ 0, & \text{αν } \exists \text{ τουλ. ένα } i \\ & \text{με } x_i \notin [\theta,+\infty) \end{cases}$$

$$= I_{[\theta,+\infty)}(x_{(1)})$$

$$f(x,\theta) = e^{-\sum x_i} \cdot e^{n\theta} \cdot I_{(\theta,+\infty)}(x_{(1)})$$

$h(x) = e^{-\sum x_i}$, $g(T(x),\theta) = e^{n\theta} \cdot I_{[\theta,+\infty)}(x_{(1)})$

Άρα, $T(\underset{\sim}{X}) = X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ επαρκές

Θέλουμε $f_T(t) = n[1-F_X(t)]^{n-1} \cdot f_X(t)$

$f(x,\theta) = e^{-(x-\theta)}, \quad x \geq \theta$

$F_X(t,\theta) = \int_\theta^{+\infty} e^{-(t-\theta)} dt = 1 - e^{-(t-\theta)}, \quad t \geq \theta$

Άρα, $f_T(t) = n[1-1+e^{-(t-\theta)}]^{n-1} \cdot e^{-(t-\theta)}$
$= n \cdot e^{-(t-\theta)\cdot n}, \quad t \geq \theta$

$E(h(T)) = 0 \Rightarrow \int_\theta^{+\infty} h(T) \cdot n \cdot e^{-(t-\theta)n} dt = 0$

$\Rightarrow \int_\theta^{+\infty} h(T) \cdot e^{-nt} dt = 0, \quad \forall \theta > 0$

$\Rightarrow -h(\theta) \cdot e^{-n\theta} = 0 \Leftrightarrow h(\theta) = 0$

Άρα T πλήρες

- Συνέπεια - Συνεπής εκτιμητής

Ορισμός: Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τυχαίο δείγμα από πληθυσμό με κατανομή $f(x,\theta), \theta \in \Theta$. Έστω $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ένας εκτιμητής της $g(\theta)$. Ο $T_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ή η ακολουθία των εκτιμητών $\{T_n(X_1, X_2, \dots, X_n)\}$ λέγεται συνεπής εκτιμητής της $g(\theta)$ αν $\lim_{n\to+\infty} P(|T_n(X_1, \dots, X_n) - g(\theta)| \geq \varepsilon) = 0$.

Πρόταση: Ο εκτιμητής $T_n = T_n(X_1, X_2, \dots X_n)$ είναι συνεπής της $g(\theta)$ αν (i) $E(T_n) \xrightarrow{n\to+\infty} g(\theta)$ (ασυμπτωτική αμεροληψία)

(ii) $Var(T_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Απόδειξη: Ανισότητα Markov: Αν η τ.μ. $W \geq 0$

τότε $P(W \geq \varepsilon) \leq E(W^2)/\varepsilon^2$

Εφαρμόζω για $W = |T_n(X_1, X_2, \dots X_n) - g(\theta)|$

Τότε $P(|T_n(X_1, X_2, \dots, X_n) - g(\theta)| > \varepsilon) \leq \dfrac{E(T_n(X_1, X_2, \dots, X_n) - g(\theta))^2}{\varepsilon^2}$

$$\Rightarrow P(|T_n(X_1, X_2, \dots, X_n) - g(\theta)| > \varepsilon) \leq \frac{\cancel{Var(T_n)} + \cancel{E(T_n - g(\theta))}^2}{\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow P(|T_n - g(\theta)| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$\Rightarrow T_n$ συνεπής εκτιμητής.

Παράδειγμα: Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ από $N(\mu, \sigma^2)$

ΝΔΟ S^2 συνεπής της σ^2

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

(i) $E(S^2) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma^2$. Γνωρίζουμε ότι $E(S^2) = \sigma^2$ άρα

προφανώς $E(S^2) \to \sigma^2$

επειδή $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n-1} \Rightarrow \frac{n-1}{\sigma^2}E(S^2) = n-1 \Rightarrow E(S^2) = \sigma^2$$

(ii) $$Var\left(\frac{n-1}{\sigma^2}S^2\right) = 2(n-1) \Rightarrow \frac{(n-1)^{\cancel{2}}}{\sigma^4} Var(S^2) = 2(\cancel{n-1})$$

$$\Rightarrow Var(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Παράδειγμα: $X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ. από $U(0,\theta)$ νδο

$X_{(n)}$ συνεπής της θ

(i) $$f_{X_{(n)}}(t) = \frac{n}{\theta^n}\cdot t^{n-1}, \quad 0 < t < \theta$$

$$E(X_n) = \int_0^\theta t\cdot\frac{n}{\theta^n}\cdot t^{n-1}\,dt = \frac{n}{\theta^n}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^\theta$$

$$= \frac{n}{\theta^n}\cdot\frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1}\theta \to \theta$$

$$E(X_n^2) = \int_0^\theta t^2\cdot\frac{n}{\theta^n}\cdot t^{n-1}\,dt = \frac{n}{n+2}\theta^2$$

$$Var(x_n) = \frac{n}{n+2}\theta^2 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2\theta^2 \Rightarrow \theta^2 - \theta^2 = 0$$

Ayı $Var(x_n) \to 0$